1.2 Elektrische Grundlagen

1.2.1 Mathematische Voraussetzungen

Wichtige mathematische Operationen sind:

- **Differenzieren** (Ableiten): Bestimmen der Veränderungsrate einer Grösse, am Beispiel einer Zeitfunktion:

$$\frac{dy(t)}{dt} = \dot{y}(t) \approx \frac{\Delta y(t)}{\Delta t}$$

Eine zeitliche Ableitung wird auch mit einem Punkt bezeichnet.

- **Integrieren** (einer Zeitfunktion): Aufsummieren des Produktes «Zeitfunktion mal Zeitschritt» für sehr kurze Zeitschritte.

$$\int y(t)dt \approx \sum_{0...t} y(t)\Delta t = \sum_{0...t} \Delta A$$

Integrieren ist die Umkehroperation zum Differenzieren. Beide Operationen werden anhand der einfachen Zeitfunktion *y(t)* in Abbildung 1.7 verdeutlicht.

Reelle und komplexe Zahlen: Neben den reellen werden vor allem in der Elektrotechnik auch komplexe Zahlen verwendet. Während sich die reellen auf der reellen Zahlengeraden darstellen lassen, wird für die komplexen die komplexe Zahlenebene verwendet (Abbildung 1.8).

Auf der reellen Zahlengeraden lassen sich beliebige positive und negative Zahlen darstellen (z. B. a = –1,5; b = 2,156..).

Komplexe Zahlen bestehen aus einem Realteil auf der reellen Achse und einem Imaginärteil auf der imaginären Achse (z. B. $\underline{z}$ = 4+j2,5). Der Imaginärteil wird dabei mit *i* oder *j* gekennzeichnet. Ihr Name wird zur Kennzeichnung oft auch unterstrichen.

Für die Nutzung in der komplexen Wechselstromrechnung werden normalerweise nur ein Teil der Eigenschaften und Definitionen der komplexen Zahlen gebraucht. Diese werden am Beispiel der beiden Zahlen z und w dargestellt:

$$\underline{z} = x + jy = |x + jy|e^{j\varphi_z} = |\underline{z}|e^{j\varphi_z}$$
$$\underline{w} = u + jv = |u + jv|e^{j\varphi_w} = |\underline{w}|e^{j\varphi_w}$$
$$x, u : \text{Realteil}$$
$$y, v : \text{Imaginärteil}$$

- **Polare Darstellung mit Betrag und Winkel (Polar-Koordinaten)**

$$\underline{z} = |\underline{z}| \cdot e^{j\varphi_z}$$
$$|\underline{z}| = |x + jy| = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$e^{j\varphi_z} = \cos(\varphi_z) + \mathrm{j}\sin(\varphi_z)$$
$$\varphi_z = \arctan(y/x);\ \left|e^{j\varphi_z}\right| = 1$$

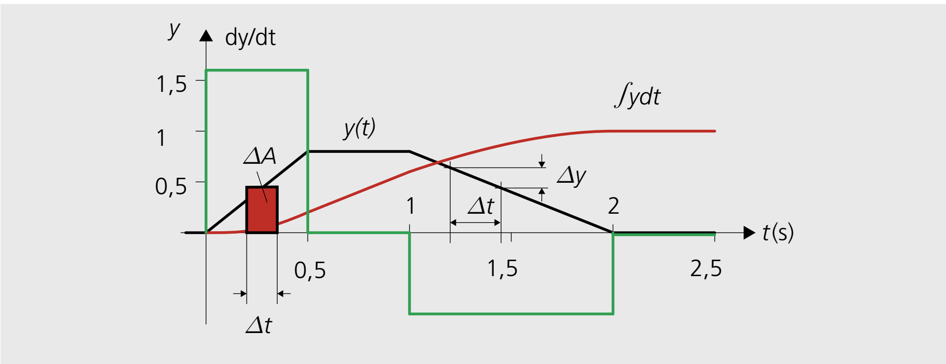

Abbildung 1.7: Integrieren (rot) und Differenzieren (grün) der Zeitfunktion y(t) (schwarz).

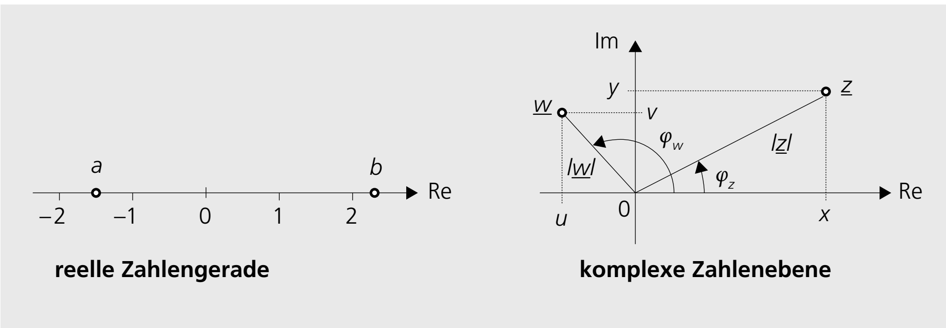

Abbildung 1.8: Reelle Zahlengerade und komplexe Zahlenebene.

- **Kartesische Darstellung mit Komponenten (kartesische Koordinaten):** Sind Betrag und Winkel einer Zahl bekannt, so lassen sich die Komponenten bestimmen:

$$x = |\underline{z}|\cos(\varphi_z): \quad x : \text{Realteil}$$
$$y = |\underline{z}|\sin(\varphi_z): \quad y : \text{Imaginärteil}$$

- **Addition und Subtraktion** werden komponentenweise ausgeführt:

$$(x + jy) + (u + jv) = (x + u) + j(y + v)$$
$$(x + jy) - (u + jv) = (x - u) + j(y - v)$$

- **Multiplikationen** werden am einfachsten in der polaren Darstellung als Multiplikation der Beträge und Addition der Winkel ausgeführt:

$$\underline{z} \cdot \underline{w} = |\underline{z}|e^{j(\varphi_z)} \cdot |\underline{w}|e^{j(\varphi_w)} = |\underline{z}||\underline{w}|e^{j(\varphi_z + \varphi_w)}$$
$$= (x + jy)(u + jv) = (xu - yv) + j(xv + yu)$$

- **Divisionen** werden am einfachsten in der polaren Darstellung als Division der Beträge und Subtraktion der Winkel ausgeführt:

$$\frac{\underline{z}}{\underline{w}} = \frac{|\underline{z}|}{|\underline{w}|}e^{j(\varphi_z - \varphi_w)}$$
$$= \frac{(x + jy)}{(u + jv)} = \frac{(x + jy)(u - jv)}{(u + jv)(u - jv)}$$
$$= \frac{(xu + yv) + j(yu - xv)}{u^2 + v^2}$$

- **Beträge von Multiplikation und Divisionen:** Bei Multiplikationen entspricht der Betrag des Produktes dem Produkt der Beträge der Multiplikanden. Bei Divisionen gilt entsprechend, dass der Betrag des Quotienten dem Quotienten der Beträge entspricht.

- **Spezielle Winkel:** Es gelten folgende Beziehungen.

$$\frac{1}{j} = -j; \quad e^{j\pi/2} = j; \quad e^{-j\pi/2} = -j;$$
$$e^{\pm j\pi} = -1; \quad e^{j2\pi} = 1$$

1.2.2 Spannung, Strom und Leistung

Spannung und Strom sind die in der Elektrotechnik grundlegenden Grössen. Die Spannung U_{AB} in Abbildung 1.9 zwischen den Punkten A und B gibt an, welche Energie *W* benötigt wird, um in einem elektrischen Feld mit der Feldstärke *E* die Ladung *Q* von A nach B zu bewegen. Der Strom *I* entspricht der Ladung *Q* pro Sekunde, die durch einen Leiter fliesst. Das Produkt von Spannung *U* mal Strom *I* schliesslich ergibt die Energie pro Sekunde, also die Leistung *P*.

Ladung	*Q*	C, As	Coulomb, Ampere-Sekunden
Elektrische Feldstärke	*E*	V/m	Volt pro Meter
Spannung	*U*	V, W/A	Volt
Strom	*I*	A	Ampere

Wird die Ladung, wie in Abbildung 1.9 dargestellt, parallel zur Richtung des Feldes bewegt, so gilt für die Spannung *U* als Definition über die Arbeit *W*:

$$W = \int_A^B EQds = Q\int_A^B Eds \quad \text{und damit}$$

$$U = \frac{W}{Q} = \int_A^B Eds$$

Sind Feld und Weg nicht parallel, so muss nur die Feldkomponente in Wegrichtung berücksichtigt werden (d. h. das Skalarprodukt $\vec{E} \cdot \vec{ds}$).

Der Strom wird über den Ladungsfluss beschrieben:

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} Idt \quad \text{in Differentialform} \quad I = \frac{dQ}{dt}$$

und schliesslich die Leistung über die Arbeit:

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{dQ}{dt}\int_A^B Eds = I \cdot U$$

Zur näheren Kennzeichnung werden für elektrische Grössen verschiedene Schreibweisen verwendet (Tabelle 1.5).

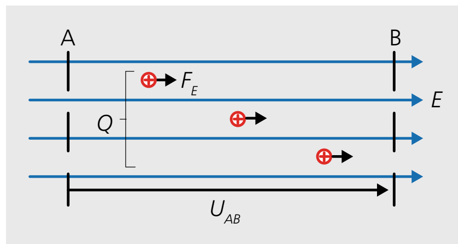

Abbildung 1.9: Spannung, Strom, Energie und Leistung.